

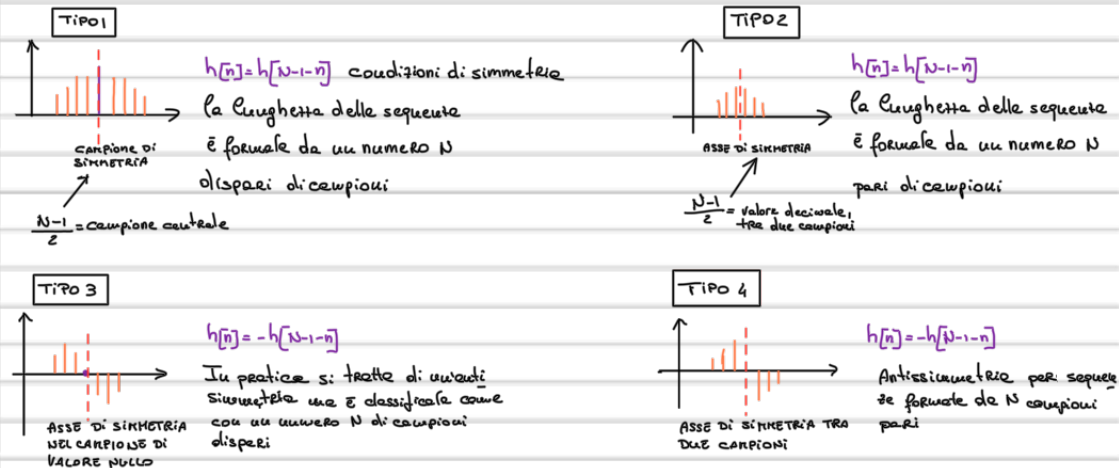
INTRODUZIONE

Utili, ad esempio, dei sistemi di elaborazione d'immagine. Un filtro a fase lineare introduce un ritardo in campionari costante oppure nullo. La linearità della fase è legata alla simmetria delle risposte impulsive che se è rispetto all'origine si ha un filtro a fase nulla.

A QUALI FILTRI SI APPLICA

Si applica sia a filtri di tipo FIR (simmetrie di tipo 1,2,3,4) oppure a filtri di tipo IIR (simmetria rispetto all'origine)

Tipi di simmetria per filtri FIR

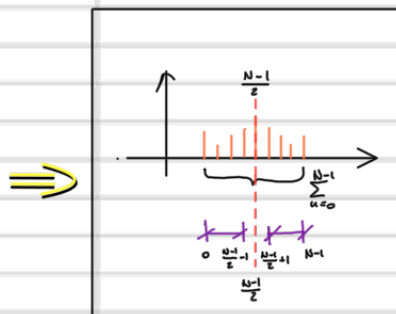


Tipo di simmetria per filtri IIR



$H(f)$ PER SIMMETRIA DI TIPO 1 E 2

Caso di studio per Tipo 1, gli altri sono simili con l'unica differenza del punto di divisione delle somme (vedi fig. sotto)



dalla definizione $H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{nT} = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] e^{-j2\pi f n} + h[\frac{N-1}{2}] e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi f n} = \dots$

operando la sostituzione $m = N-1-n \Rightarrow n = \frac{N-1}{2} + 1 + m \Rightarrow m = \frac{N-1}{2} - 1, n = N-1 \Rightarrow m=0$

alla seconda sommatoria ottengo

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[m] e^{-j2\pi f (N-1-m)} \\ & \dots = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] e^{-j2\pi f n} + h[\frac{N-1}{2}] e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}} + \sum_{m=\frac{N-1}{2}-1}^0 h[n] e^{-j2\pi f n} = \text{Raggruppo le due sommatorie} \\ & = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] (e^{-j2\pi f n} + e^{-j2\pi f (N-1-n)}) + h[\frac{N-1}{2}] e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}} = \begin{cases} \frac{N-1}{2} + x = n \Rightarrow x = n - \frac{N-1}{2} \\ \frac{N-1}{2} + x = N-1-n \Rightarrow x = \frac{N-1}{2} - n \end{cases} \\ & \text{Raccoglio il termine } e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}} \text{ nuovo esponente dopo l'identificazione} \\ & = h[\frac{N-1}{2}] e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}} (e^{-j2\pi f (n - \frac{N-1}{2})} + e^{-j2\pi f (\frac{N-1}{2} - n)}) = e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}} [h[\frac{N-1}{2}] + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] 2 \cos(n - \frac{N-1}{2})] \\ & \text{cambio segno e inverto i termini dentro [-]} \end{aligned}$$

$= e^{-j2\pi f \frac{N-1}{2}} A(f) = \angle A(f) A(f)$ modulo e fase sono reali con quest'ultima costante

NB: Allo stesso risultato della simmetria di tipo 1 giungo per la simmetria di tipo 2 ma nelle considerazioni che il ritardo non è esprimibile in campioni in quanto $\frac{N-1}{2}$ non è un intero perché N è pari e il centro di simmetria non coincide con nessun istante di campionamento.

$H(F)$ PER SIMMETRIA DI TIPO 3 E 4

Procedo in modo analogo alle simmetrie di tipo 1

$$\begin{aligned}
 H(F) &= \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] e^{-j2\pi F n} + h[\frac{N-1}{2}] e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} - \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi F n} = \\
 &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] e^{-j2\pi F n} + h[\frac{N-1}{2}] e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} - \sum_{m=\frac{N-1}{2}-1}^0 h[m] e^{-j2\pi F (N-1-m)} = \dots \\
 &= h[\frac{N-1}{2}] e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] (e^{-j2\pi F n} - e^{-j2\pi F (N-1-n)}) = \dots = \\
 &= e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} \left[h[\frac{N-1}{2}] + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] 2j \sin\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \right] = e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} \left[j \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] \sin\left(n - \frac{N-1}{2}\right) \right] = \\
 &= e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} j A(F)
 \end{aligned}$$

da notare che la fase anche in questo caso il ritardo è lineare ed è misurabile in campioni

da notare che il termine j può far parte delle fase $e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2} + \frac{\pi}{2}}$ oppure dell'ampiezza, in ogni caso $H(F)$ è reale di π .

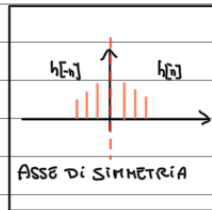
In modo analogo per una simmetria di tipo 4 otteniamo lo stesso risultato.

$$H(F) = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi F n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h[n] e^{-j2\pi F n} + h[\frac{N-1}{2}] e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} - \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h[n] e^{-j2\pi F n} = \dots = e^{-j2\pi F \frac{N-1}{2}} j A(F)$$

In entrambe le simmetrie il termine $h[\frac{N-1}{2}]$ è nullo ma si considera tale dopo il raggruppamento.

$H(F)$ PER FILTRI IIR

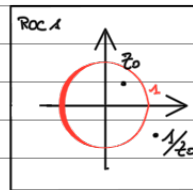
in pratica la sequenza è infinita anche se è rappresentata con una sequenza finita.



$$\begin{cases} h[n] \rightarrow H(z) \\ h[-n] \rightarrow H(z^{-1}) \end{cases}$$

per la proprietà di simmetria $h[n]=h[-n]$ ne deriva che $H(z)=H(z^{-1})$ per cui se z_0 è un polo/zero di $H(z)$ allora $1/z_0$ è un polo/zero di $H(z)$.

Questo implica che per questo tipo di simmetria la risposta ha poli/zeri i quali se sono reali sono a coppie (ROC1) mentre se sono complessi sono a doppia coppia (ROC2)



quando un filtro ha una simmetria unitaria all'origine allora il filtro è a fase nulla.

Questi tipo di filtri si implementano con una risposta impulsiva di tipo bilaterale in quanto, come si vede dai grafici delle ROC, vi è una parte causale ed una parte anticausale.

